10　等式・不等式の証明

73

(1)

解法 1：$x^2+y^2+z^2=0 \Leftrightarrow x=y=z=0$

$x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)=0$ より，$x^2+y^2+z^2=0$　$\therefore x=y=z=0$

解法 2：1 文字消去

$$
\begin{aligned}
xy+yz+zx &= xy+y(-x-y)+(-x-y)x \\
&= -(x^2+xy+y^2) \\
&= -\left\{\left(x+\frac{y}{2}\right)^2+\frac{3}{4}y^2\right\} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

より，$\left(x+\dfrac{y}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}y^2=0$

よって，$x+\dfrac{y}{2}=0$ かつ $y=0$　すなわち $x=y=0$

ゆえに，$x=y=z=0$

(2)

解法 1：$(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)=x^3+y^3+z^3-3xyz$

$$
\begin{aligned}
x^3+y^3+z^3 &= (x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)+3xyz \\
&= 3xyz \\
&= 0
\end{aligned}
$$

より，$xyz=0$

よって，x, y, z のうち少なくとも 1 つは 0 である。

解法 2：1 文字消去

$$
\begin{aligned}
x^3+y^3+z^3 &= x^3+y^3+\{-(x+y)\}^3 \\
&= -3xy(x+y) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

よって，$xy(x+y)=0$　すなわち $xy=0$ または $x+y=0$

$xy=0$ のとき

x, y のうち少なくとも 1 つは 0 である。

$x+y=0$ のとき

$z=-(x+y)=0$

よって，x, y, z のうち少なくとも 1 つは 0 である。

(3)

$$\begin{aligned} x^3+y^3+z^3 &= (x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)+3xyz \\ &= (x+y+z)\cdot\frac{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2}{2}+3xyz \\ &= 0 \end{aligned}$$

より，

$$xyz=-\frac{(x+y+z)\{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\}}{6}$$

ここで，$(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2=0$ とすると，$x-y=y-z=z-x$ より，$x=y=z$

このとき，$x^3+y^3+z^3=3x^3=0$　$\therefore x=y=z=0$

ところが，$x+y+z\neq 0$（矛盾）

よって，$(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\neq 0$

ゆえに，$xyz\neq 0$　すなわち x, y, z のどれも 0 ではない。

74

(1)

$pq+1-(p+q)=(p-1)(q-1)>0$　$\therefore p+q<pq+1$

(2)

$$\begin{aligned} \left(\sqrt{a}+\sqrt{b}-1\right)^2-\left(\sqrt{a+b-1}\right)^2 &= 2\left(\sqrt{a}\sqrt{b}-\sqrt{a}-\sqrt{b}+1\right) \\ &= 2\left(\sqrt{a}-1\right)\left(\sqrt{b}-1\right)>0 \quad (\because a>1,\ b>1) \end{aligned}$$

これと

$$\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}-1\right)^2-\left(\sqrt{a+b-1}\right)^2=\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}-1+\sqrt{a+b-1}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}-1-\sqrt{a+b-1}\right)$$

より，

$$\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}-1+\sqrt{a+b-1}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}-1-\sqrt{a+b-1}\right)>0$$

$\sqrt{a}+\sqrt{b}-1+\sqrt{a+b-1}>0\ (\because a>1,\ b>1)$ だから，$\sqrt{a}+\sqrt{b}-1-\sqrt{a+b-1}>0$

$$\therefore \sqrt{a+b-1}<\sqrt{a}+\sqrt{b}-1$$

(3)

$b>1,\ c>1$ より，$b+c>2$　$\therefore b+c-1>1$

よって，

$$\begin{aligned} \sqrt{a+b+c-2} &= \sqrt{a+(b+c-1)-1} \\ &> \sqrt{a}+\sqrt{b+c-1}-1 \\ &> \sqrt{a}+\left(\sqrt{b}+\sqrt{c}-1\right)-1 \\ &= \sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}-2 \end{aligned}$$

75

解法 1

$\sqrt{2}$ は無理数だから，$\dfrac{p}{q} \neq \sqrt{2},\ \dfrac{2q}{p} \neq \sqrt{2}$

$$\begin{aligned}\left(\frac{p}{q}-\sqrt{2}\right)\left(\frac{2q}{p}-\sqrt{2}\right) &= \frac{p-\sqrt{2}q}{q}\cdot\frac{2q-\sqrt{2}p}{p} \\ &= \frac{p-\sqrt{2}q}{q}\cdot\frac{-\sqrt{2}\left(p-\sqrt{2}q\right)}{p} \\ &= -\frac{\sqrt{2}\left(p-\sqrt{2}q\right)^2}{pq} < 0 \quad \left(\because \frac{p}{q} \neq \sqrt{2},\ \frac{2q}{p} \neq \sqrt{2}\right)\end{aligned}$$

よって，$\dfrac{p}{q} < \sqrt{2} < \dfrac{2q}{p}$ または $\dfrac{2q}{p} < \sqrt{2} < \dfrac{p}{q}$

ゆえに，$\sqrt{2}$ は $\dfrac{p}{q}$ と $\dfrac{2q}{p}$ の間にある。

補足

$$\left(\frac{p}{q}-\sqrt{2}\right)\left(\frac{2q}{p}-\sqrt{2}\right) = 4-\sqrt{2}\left(\frac{2q}{p}+\frac{p}{q}\right)$$

ここで，$\dfrac{2q}{p}+\dfrac{p}{q} > 2\sqrt{2} \quad \left(\because \dfrac{p}{q} \neq \sqrt{2}\right)$

よって，$\left(\dfrac{p}{q}-\sqrt{2}\right)\left(\dfrac{2q}{p}-\sqrt{2}\right) = 4-\sqrt{2}\left(\dfrac{2q}{p}+\dfrac{p}{q}\right) < 4-\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2} = 0$

ゆえに，$\sqrt{2}$ は $\dfrac{p}{q}$ と $\dfrac{2q}{p}$ の間にある。

解法 2

$\sqrt{2}$ は無理数だから，$\dfrac{p}{q} \neq \sqrt{2},\ \dfrac{2q}{p} \neq \sqrt{2}$

よって，次の 3 つのどれか 1 つが成り立つ。

(i) $\sqrt{2}$ が $\dfrac{p}{q}$，$\dfrac{2q}{p}$ より大きい。　(ii) $\sqrt{2}$ が $\dfrac{p}{q}$，$\dfrac{2q}{p}$ より小さい。

(iii) $\sqrt{2}$ が $\dfrac{p}{q}$ と $\dfrac{2q}{p}$ の間にある。

(i)では，$\dfrac{p}{q} < \sqrt{2}$ かつ $\dfrac{2q}{p} < \sqrt{2}$　すなわち $p < \sqrt{2}q$ かつ $p > \sqrt{2}q$

(ii)では，$\dfrac{p}{q} > \sqrt{2}$ かつ $\dfrac{2q}{p} > \sqrt{2}$　すなわち $p > \sqrt{2}q$ かつ $p < \sqrt{2}q$

となり，いずれも成り立たない。よって，(iii)が成り立つ。

解法 3

$\sqrt{2}$ は無理数だから，$\dfrac{p}{q} \neq \sqrt{2},\ \dfrac{2q}{p} \neq \sqrt{2}$

よって，$\dfrac{p}{q} < \sqrt{2}$ または $\dfrac{p}{q} > \sqrt{2}$

$\dfrac{p}{q} < \sqrt{2}$ のとき

$\dfrac{q}{p} > \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ より，$\dfrac{2q}{p} > \sqrt{2}$　　$\therefore \dfrac{p}{q} < \sqrt{2} < \dfrac{2q}{p}$

$\dfrac{p}{q} > \sqrt{2}$ のとき

$\dfrac{q}{p} < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ より，$\dfrac{2q}{p} < \sqrt{2}$　　$\therefore \dfrac{2q}{p} < \sqrt{2} < \dfrac{p}{q}$

よって，$\sqrt{2}$ は $\dfrac{p}{q}$ と $\dfrac{2q}{p}$ の間にある。

76

(1)

$$\begin{aligned}\frac{a^3+b^3}{2}-\left(\frac{a+b}{2}\right)^3 &= \frac{3}{8}\left(a^3+b^3-a^2b-ab^2\right)\\ &= \frac{3}{8}\left\{a^2(a-b)-b^2(a-b)\right\}\\ &= \frac{3}{8}(a-b)^2(a+b) \geq 0\end{aligned}$$

よって，$\dfrac{a^3+b^3}{2} \geq \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^3$　（等号成立は $a=b$ のとき）

別解

$f(a)=\dfrac{a^3+b^3}{2}-\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^3\ (b>0)$ とおくと，

$f'(a)=\dfrac{3}{2}a^2-\dfrac{3}{2}\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2=\dfrac{3(a-b)(3a+b)}{8}$

よって，$a>0$ における $f(a)$ の増減は次のようになる。

a	0	$\cdots$	b	$\cdots$
$f'(a)$	/	$-$	0	$+$
$f(a)$	$\left(\dfrac{7b^3}{8}\right)$	↓	0	↑

ゆえに，$\dfrac{a^3+b^3}{2} \geq \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^3$　（等号成立は $a=b$ のとき）

(2)

$\dfrac{a^3+b^3}{2} \geq \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^3$ より，$\sqrt[3]{\dfrac{a^3+b^3}{2}} \geq \dfrac{a+b}{2}$

よって，$2\sqrt[3]{\dfrac{a^3+b^3}{2}} \geq a+b$ すなわち $\sqrt[3]{4\left(a^3+b^3\right)} \geq a+b$

ここで，$a=\sqrt[3]{\dfrac{3}{2}}$, $b=1$ とおくと，$a+b=\sqrt[3]{\dfrac{3}{2}}+1$, $\sqrt[3]{4\left(a^3+b^3\right)}=\sqrt[3]{10}$

これと $\sqrt[3]{\dfrac{3}{2}} \neq 1$ より，$\sqrt[3]{10} > \sqrt[3]{\dfrac{3}{2}}+1$

77

(1)

$$\begin{aligned} f(x) &= nx^2-2\left(a_1+a_2+\cdots+a_n\right)x+\left(a_1{}^2+a_2{}^2+\cdots+a_n{}^2\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n}\left(x^2-2a_kx+a_k{}^2\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n}\left(x-a_k\right)^2 \end{aligned}$$

$\therefore f(x) \geq 0$

(2)

$f(x)=0$ の判別式を D とすると，(1)より，$D \leq 0$

これと $\dfrac{D}{4}=\left(a_1+a_2+\cdots+a_n\right)^2-n\left(a_1{}^2+a_2{}^2+\cdots+a_n{}^2\right)$ より，

$\left(a_1+a_2+\cdots+a_n\right)^2-n\left(a_1{}^2+a_2{}^2+\cdots+a_n{}^2\right) \leq 0$

$\therefore \left(a_1+a_2+\cdots+a_n\right)^2 \leq n\left(a_1{}^2+a_2{}^2+\cdots+a_n{}^2\right)$

(3)

$\left(a_1+a_2+\cdots+a_n\right)^2 = n\left(a_1{}^2+a_2{}^2+\cdots+a_n{}^2\right)$ のとき，(2)より，$f(x)=0$ の判別式は 0 となる。
したがって，$f(x)=0$ は重解をもつ。

そこで，重解を α とすると，(1)より，$f(\alpha)=\sum_{k=1}^{n}\left(\alpha-a_k\right)^2=0$　$\therefore \alpha-a_k=0$

ゆえに，$\alpha=a_1=a_2=\cdots=a_n$

78

(1)

$$
\begin{aligned}
pf(x_1)+qf(x_2)-f(px_1+qx_2) &= px_1{}^2+qx_2{}^2-(px_1+qx_2)^2 \\
&= p(1-p)x_1{}^2-2pqx_1x_2+q(1-q)x_2{}^2 \\
&= pqx_1{}^2-2pqx_1x_2+qpx_2{}^2 \\
&= pq\left(x_1{}^2-2x_1x_2+x_2{}^2\right) \\
&= pq(x_1-x_2)^2 \geq 0
\end{aligned}
$$

$\therefore\ f(px_1+qx_2)\leq pf(x_1)+qf(x_2)$ （等号成立は $x_1=x_2$ のとき）

(2)

(1)で $p=q=\dfrac{1}{2}$，$x_1=a+\dfrac{1}{a}$，$x_2=b+\dfrac{1}{b}$ とおくと，

$$\frac{1}{2}f\left(a+\frac{1}{a}\right)+\frac{1}{2}f\left(b+\frac{1}{b}\right)\geq f\left(\frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{a}\right)+\frac{1}{2}\left(b+\frac{1}{b}\right)\right)$$

$$\frac{1}{2}f\left(a+\frac{1}{a}\right)+\frac{1}{2}f\left(b+\frac{1}{b}\right)=\frac{1}{2}\left\{\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2\right\}$$

$$
\begin{aligned}
f\left(\frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{a}\right)+\frac{1}{2}\left(b+\frac{1}{b}\right)\right) &= \left\{\frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{a}\right)+\frac{1}{2}\left(b+\frac{1}{b}\right)\right\}^2 \\
&= \frac{1}{4}\left(a+b+\frac{a+b}{ab}\right)^2 \\
&= \frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{ab}\right)^2
\end{aligned}
$$

より，$\dfrac{1}{2}\left\{\left(a+\dfrac{1}{a}\right)^2+\left(b+\dfrac{1}{b}\right)^2\right\}\geq\dfrac{1}{4}\left(1+\dfrac{1}{ab}\right)^2$

$\therefore\left(a+\dfrac{1}{a}\right)^2+\left(b+\dfrac{1}{b}\right)^2\geq\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{1}{ab}\right)^2$ （等号成立は $a+\dfrac{1}{a}=b+\dfrac{1}{b}$ のとき） ・・・①

$ab=a(1-a)=-a^2+a=-\left(a-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{1}{4}\leq\dfrac{1}{4}$

これと $ab>0$ より，$0<ab\leq\dfrac{1}{4}$ $\therefore\dfrac{1}{ab}\geq 4$ （等号成立は $a=b=\dfrac{1}{2}$ のとき）

よって，$\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{1}{ab}\right)^2\geq\dfrac{1}{2}(1+4)^2=\dfrac{25}{2}$ （等号成立は $a=b=\dfrac{1}{2}$ のとき） ・・・②

①，②より，$\left(a+\dfrac{1}{a}\right)^2+\left(b+\dfrac{1}{b}\right)^2\geq\dfrac{25}{2}$ （等号成立は $a=b=\dfrac{1}{2}$ のとき）

79

(1)

$$\frac{x}{1+x}-\frac{y}{1+y}=\frac{x(1+y)-y(1+x)}{(1+x)(1+y)}$$
$$=\frac{x-y}{(1+x)(1+y)}\leq 0$$

$$\therefore \frac{x}{1+x}\leq\frac{y}{1+y}$$

(2)

$$\frac{|a-b|}{1+|a-b|}+\frac{|b-c|}{1+|b-c|}=\frac{|a-b|(1+|b-c|)+|b-c|(1+|a-b|)}{(1+|a-b|)(1+|b-c|)}$$
$$=\frac{|a-b|+|b-c|+|a-b||b-c|}{1+|a-b|+|b-c|+|a-b||b-c|}+\frac{|a-b||b-c|}{1+|a-b|+|b-c|+|a-b||b-c|}$$

ここで，

$|a-c|=|(a-b)+(b-c)|\leq|a-b|+|b-c|\leq|a-b|+|b-c|+|a-b||b-c|$

等号成立は$a-b=0$または$b-c=0$すなわち$a=b$または$b=c$のとき

これと(1)より，

$$\frac{|a-b|}{1+|a-b|}+\frac{|b-c|}{1+|b-c|}=\frac{|a-b|+|b-c|+|a-b||b-c|}{1+|a-b|+|b-c|+|a-b||b-c|}+\frac{|a-b||b-c|}{1+|a-b|+|b-c|+|a-b||b-c|}$$
$$\geq\frac{|a-c|}{1+|a-c|}+\frac{|a-b||b-c|}{1+|a-b|+|b-c|+|a-b||b-c|}$$

等号成立は$a=b$または$b=c$のとき

さらに，$\dfrac{|a-b||b-c|}{1+|a-b|+|b-c|+|a-b||b-c|}\geq 0$ （等号成立は$a=b$または$b=c$のとき）

より，

$$\frac{|a-b|}{1+|a-b|}+\frac{|b-c|}{1+|b-c|}\geq\frac{|a-c|}{1+|a-c|}+\frac{|a-b||b-c|}{1+|a-b|+|b-c|+|a-b||b-c|}$$
$$\geq\frac{|a-c|}{1+|a-c|}$$

等号成立は$a=b$または$b=c$のとき

ゆえに，

$$\frac{|a-b|}{1+|a-b|}+\frac{|b-c|}{1+|b-c|}\geq\frac{|a-c|}{1+|a-c|}$$

等号成立は$a=b$または$b=c$のとき